

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

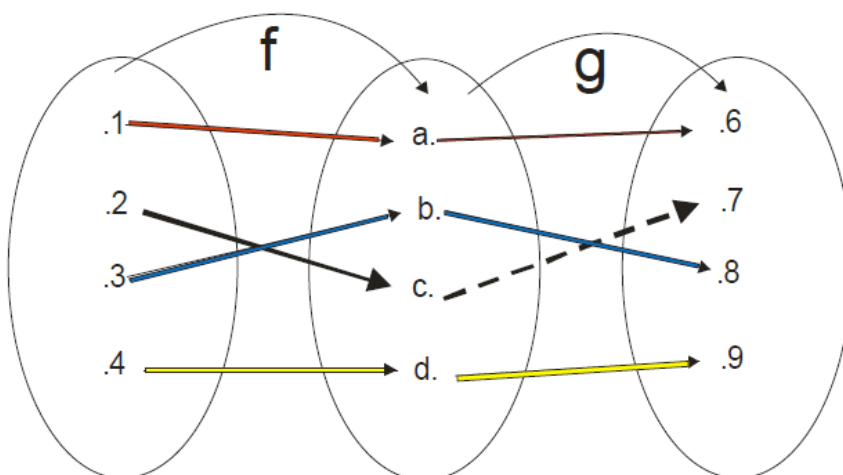
Neka su $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ funkcije. Tada sa $g \circ f$ označavamo kompoziciju (proizvod) preslikavanja f i g , i definišemo ga sa $(\forall x \in A) ((g \circ f)(x) = g(f(x)))$. Na ovaj način smo ustvari dobili preslikavanje $g \circ f: A \rightarrow C$ (kompozicija se najčešće obeležava sa \circ , a čita se “**kružić**”

primer 1.

Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **odrediti** $(g \circ f)(x)$

Rešenje:

Ajmo najpre da ovo predstavimo dijagramom da vidimo šta se zapravo dešava a onda ćemo ispisati i rešenje:



Za svaki element radimo posebno:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(a) = 6$ Na slici uočite *crvene* strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(2)) = g(c) = 7$ Na slici uočite *crne* strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(3)) = g(b) = 8$ Na slici uočite *plave* strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(4)) = g(d) = 9$ Na slici uočite *žute* strelice.

primer 2.

Ako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ odrediti:

a) $f \circ g = ?$

b) $g \circ h = ?$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Rešenje:

a) $f \circ g = ?$

Kako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, idemo redom:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(p)) = f(1) = c$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(q)) = f(4) = d$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(r)) = f(3) = b$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(s)) = f(2) = a$$

Oдавде imamo da je: $f \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$

b) $g \circ h = ?$

$$g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}, \text{ pa je :}$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(a)) = g(r) = 3$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(b)) = g(p) = 1$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(c)) = g(q) = 4$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(d)) = g(s) = 2$$

$$\text{Pa je : } g \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Slično radimo , samo što sada imamo tri funkcije u kompoziciji:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x)))$ Prvo radimo f , pa h i na kraju g ...

Ovako smemo da radimo jer važi asocijativni zakon $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$. Dakle:

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(1))) = g(h(c)) = g(q) = 4$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(2))) = g(h(a)) = g(r) = 3$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(3))) = g(h(b)) = g(p) = 1$$

$$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(4))) = g(h(d)) = g(s) = 2$$

Ova kompozicija je $(g \circ h) \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

primer 3.

Date su funkcije $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = 5x + 7$. Odrediti:

- a) $f \circ g$
- b) $g \circ f$
- c) $f \circ f$
- d) $g \circ g$

Rešenje:

Ovo je drugi tip zadatka vezan za kompoziciju funkcija.

- a) $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$ Sad zamenimo funkciju koja je "unutra", znači $g(x)$

$(f \circ g)(x) = f(\boxed{g(x)}) = f(5x + 7) =$ nadjemo kako izgleda funkcija f ($f(x) = 3\boxed{x} - 2$) i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3\boxed{5x + 7} - 2$ i još da ovo malo prisredimo...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3(5x + 7) - 2 = 15x + 21 - 2 = 15x + 19$

- b) $g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ opet prvo zamenimo funkciju unutar...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2)$, sad posmatramo funkciju g i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 5(3x - 2) + 7$ opet malo sredimo...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 5(3x - 2) + 7 = 15x - 10 + 7 = 15x - 3$

c) $f \circ f$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x - 2) = 3(3x - 2) - 2 = 9x - 6 - 2 = 9x - 8$$

d) $g \circ g$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x + 7) = 5(5x + 7) + 7 = 25x + 35 + 7 = 25x + 42$$

primer 4. Date su funkcije $f(x+1) = 5x - 3$ i $g(2x - 3) = 3x + 1$. Odrediti:

a) $f \circ g$

b) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Rešenje:

Prvo da nađemo $f(x)$ i $g(x)$.

$$f(x+1) = 5x - 3$$

$$x+1 = t$$

$$x = t - 1$$

$$f(t) = 5(t-1) - 3$$

$$f(t) = 5t - 5 - 3$$

$$f(t) = 5t - 8 \rightarrow \boxed{f(x) = 5x - 8}$$

$$g(2x - 3) = 3x + 1$$

$$2x - 3 = t$$

$$2x = t + 3$$

$$x = \frac{t+3}{2}$$

$$g(t) = 3 \frac{t+3}{2} + 1$$

$$g(t) = \frac{3t+9+2}{2}$$

$$g(t) = \frac{3t+11}{2} \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{3x+11}{2}}$$

Dalje tražimo inverzne funkcije:

$$f(x) = 5x - 8$$

$$y = 5x - 8$$

$$5x = y + 8$$

$$x = \frac{y+8}{5} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+8}{5}}$$

$$g(x) = \frac{3x+11}{2}$$

$$y = \frac{3x+11}{2}$$

$$3x+11 = 2y$$

$$3x = 2y - 11$$

$$x = \frac{2y-11}{3} \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = \frac{2x-11}{3}}$$

Sada možemo naći:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+11}{2}\right) = 5 \cdot \frac{3x+11}{2} - 8 = \frac{15x+55-16}{2} = \boxed{\frac{15x+39}{2}}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{x+8}{5}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x+8}{5} - 11}{3} = \frac{2x+16-55}{3} = \frac{2x-39}{3} = \frac{2x-39}{\frac{3}{1}} = \boxed{\frac{2x-39}{15}}$$